

均衡利子率の推計手法および推定結果について

2018年5月30日

新谷元嗣（東京大学先端科学技術研究センター）

宮尾龍蔵（東京大学大学院経済学研究科）

目次

1. はじめに	1
2. 均衡利子率の概念と主要な推計手法	2
3. 1変数の時系列アプローチ（HP フィルター）	4
4. Laubach-Williams モデル.....	7
5. DSGE モデル.....	12
6. 結果の要約.....	17
技術的補論.....	19
参考文献	25

1. はじめに

本稿は、2018年5月30日に公表したNIRA オピニオンペーパーno.38「金融政策はジレンマを乗り越えられるか—均衡利子率の推計から示唆されること—」で示された均衡利子率の推計手法の詳細と推定結果を説明したバックグラウンド・ペーパーである。

景気や物価など経済に影響を及ぼさない中立的な金利水準——本稿では均衡利子率と呼ぶ。自然利子率あるいは均衡実質金利とも呼ばれる——の動向を把握することは、金融政策スタンスを論ずる際のベンチマークとなる基本的事項である。現実には観察される実質金利の水準が、均衡利子率よりも高ければ（低ければ）、金融政策スタンスは引締めの（緩和的）となり、景気や物価を抑制する（刺激する）と判断することができる。

本稿は、均衡利子率に関する最新の研究成果も踏まえつつ、主要な推計アプローチに基づく結果を提示する。主要な推計手法として、1変数の時系列アプローチ（Hodrick-Prescott (1997) フィルター [以下、HP フィルター]）、Laubach-Williams (2003) モデル、動学的確率一般均衡（Dynamic Stochastic General Equilibrium, 以下 DSGE）モデルの概要を説明し、各モデルに基づく推定値を提示する。推計に先立ち、第2節では均衡利子

率の概念、および各推計手法の特徴を概観する。第 3～5 節では各手法と結果の詳細、および先行研究について議論し、最後に第 6 節で推定結果をまとめて結語とする。なお、Laubach-Williams モデルと DSGE モデルの推定方法のさらに詳細な部分については、巻末の技術的補論で解説している。

2. 均衡利子率の概念と主要な推計手法

2.1 均衡利子率の概念

推計に先立ち、均衡利子率の概念について整理しておきたい（小田・村永（2003）、岩崎ほか（2016）なども参照）。すでに触れたように、一般に均衡利子率とは、経済・物価に対して緩和的にも引締めのにもならない中立的な実質金利を指す。理論的には、「価格が伸縮的で完全雇用が達成されているもとの、貯蓄と投資をバランスさせる実質金利」と定義される。もし現実の実質金利が均衡利子率を上回れば、産出量は完全雇用水準（均衡産出量、自然産出量とも呼ばれる）を下回り、物価を下押しする。逆に実質金利が均衡利子率を下回れば、産出量や物価を押し上げる方向に作用する。

この均衡利子率を経済成長モデルの枠組みで考えると、長期の最適成長経路上で実現する実質金利（つまり価格が伸縮的で需給がバランスする均斉成長経路と整合的な実質金利）と位置付けることができる。均衡利子率は均衡産出量（＝完全雇用産出量）に対応する概念であり、均衡産出量の成長率である潜在成長率に対応することは直感的にも理解できる。フォーマルには、最適成長理論のベースとなる家計の最適な消費・貯蓄行動（「消費のオイラー方程式」）から明示的に導出され、その結果、均衡利子率は、長期の潜在成長率に対応する部分（生産性成長率など）と、それ以外の短期的な変動要因（家計の選好の変化や財政政策などの需要ショック）から説明される部分の合計として表される。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{均衡利子率} &= \text{長期的なトレンド部分（潜在成長率に対応）} \\ &+ \text{それ以外の変動部分（需要ショックにより変動）} \end{aligned}$$

と表される。均衡利子率（自然利子率）を潜在成長率で近似するといった議論がしばしば見られるが、それは短期的な変動要因の影響が無視できる長期のトレンド部分に着目した見方であることが理解できる。

2.2 主要な推計手法：概観

それでは、本稿で用いた 3 つの均衡利子率の推計手法、(1) 1 変数の時系列アプローチ（HP フィルター）、(2) Laubach-Williams モデル、(3) DSGE モデルについて、それぞれの概要と特徴を紹介しよう。

(1) 1変数の時系列アプローチ（HP フィルター）

まず1変数の時系列アプローチ（HP フィルター）は、現実に観察される実質金利データからトレンド成分を統計的に取り出す手法である。現実の実質金利は、均衡利子率の周りを常に変動しているという想定に基づき、HP フィルターを用いて均衡利子率の推定値を抽出する。

HP フィルターの最大の特徴はその簡便さであり、潜在 GDP や潜在成長率の推計にも応用されることもある。一方で、単純に1変数のデータの変動を均すという統計処理だけに依存するもので、経済理論的な意味合いは含まれていない点に注意が必要である。

(2) Laubach-Williams モデル

Laubach-Williams モデルは、標準的な経済理論（IS 曲線、フィリップス曲線など）を明示的に想定して均衡利子率を推計するアプローチである。

すでに述べてきたように、均衡利子率とは、経済・物価に対して緩和的にも引締めのにもならない中立的な実質金利である。Laubach-Williams モデルでは、経済の総需要については IS 曲線を想定し、実質金利が均衡利子率を上回れば（下回れば）総需要あるいは需給ギャップは減少（増大）するという関係を明示する。経済の総供給面では伝統的なフィリップス曲線を仮定し、インフレ率は、人々の適応的なインフレ予想と需給ギャップ（＝実質 GDP－潜在 GDP）によって説明される。さらに潜在成長率は、そのトレンド部分が確率的に変動するランダムウォーク変数と想定される。同様に需要ショックもランダムウォーク変数として定義される。Laubach-Williams モデルの均衡利子率は、先の式でいえば、第1項のトレンド部分だけでなく第2項の需要要因も含んだ形で（そしてどちらもショックの影響が永続する確率トレンドとして）定式化される。

Laubach-Williams モデルの特徴は、ややインフォーマルながら、経済モデルの構造を明示している点である。次に述べる DSGE モデルのように、家計や企業の動学的な最適化行動までは明記されていないが、IS 曲線、フィリップス曲線はいずれも標準的なマクロ理論で用いられる関係式であり、そうした理論メカニズムが考慮されている点は、1変数の時系列アプローチにはない特徴である。また、潜在成長率に起因するトレンド部分とともに、需要ショックによる変動も考慮されており、その意味でもより一般的なアプローチといえる。実際、米国 FRB（サンフランシスコ連銀 John Williams 総裁本人のウェブページ <https://www.frbsf.org/economic-research/economists/john-williams/>）では Laubach-Williams モデルによる最新の推定値が公表されており、その重要性の大きさがうかがわれる。

(3) DSGE モデル

DSGE モデルは、家計や企業の動学的な最適化行動を明示的に考慮して均衡利子率を推定する。そのエッセンスを簡略化して述べると、代表的な家計は消費と余暇から得られる

効用を将来にわたって最大化する。代表的な企業は每期利潤を最大化し、将来にわたる調整費用も考慮して価格を設定する。また本稿で用いるモデルでは、中央銀行はゼロ金利制約を考慮した金融政策ルールに従うと想定する。経済構造を完全に特定化したもとで、最終的に得られる均衡利子率は非線形の表現となり、推定にも高度な手法が要求される。ただし、線形モデルで近似すれば、IS 曲線とフィリップス曲線に相当する式が導出され、上記の Laubach-Williams モデルとの対応関係も議論できる。

DSGE モデルは、現代のマクロ経済分析をけん引する主力の分析アプローチであり、各主体の行動が完全に描写された構造モデルに基づくという点が最大の特徴である。また政策分析に伴う「ルーカス批判」も回避できる。他方で、その設定にはさまざまなバリエーションが考えられ、推定結果はモデルの前提に依存する。したがって、モデルの構造や想定されるパラメータに関する頑健性を調べる点が重要となる。本稿の分析においても頑健性に注意を払って分析を進める。

次節以降では、各推計手法の詳細について説明する。

3. 1 変数の時系列アプローチ (HP フィルター)

3.1 推計手法

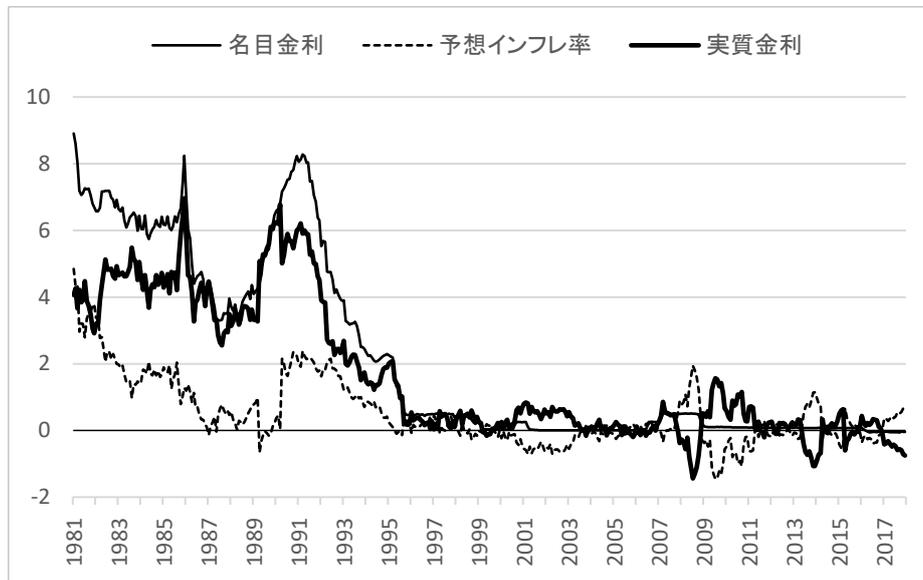
HP フィルターに基づく均衡利子率の推計では、実質金利からトレンド成分を抽出する。このため、まず実質金利の動きを確認しておくことは有益である。

図 1 は名目短期金利として無担保オーバーナイト・コールレート、インフレ率として生鮮食料品を除く消費者物価指数の前年同月比の将来予測値、その差としての実質金利の月次データが示されている。推計に用いた標本期間は 1980 年 1 月から 2017 年 12 月である (図 1 では 1981 年 1 月から 2017 年 12 月まで)。将来の予想インフレ率の作成には、以下の自己回帰 (Autoregressive, AR) モデル

$$\bar{\pi}_{t+12} = \phi_0 + \phi_1\pi_t + \phi_2\pi_{t-1} + \dots + \phi_{12}\pi_{t-11} + \varepsilon_t$$

を推定し、その予測値を利用した。ただし、 π_{t-j} は前年同期比によるインフレ率、 $\bar{\pi}_t = \sum_{j=0}^{11} \pi_{t-j} / 12$ は 1 年の平均インフレ率であり、被説明変数の添え字 $t+12$ は 12 カ月先の平均インフレ率を示している。図 1 をみると、実質金利は 4% 近辺から、1990 年代にいったん上昇するものの、それ以降はほぼ単調に低下する傾向が観察される。また、予想インフレ率は 1990 年代半ば中盤までは正值をとることが多かったため、実質金利が名目金利を下回ることが多かった。1990 年代半ばを過ぎると、名目金利、予想インフレ率がほぼ 0 近辺で推移することから、実質金利もほぼ 0 周りを変動している。

図1 名目金利、予想インフレ率、実質金利



注：月次データ（1981年1月～2017年12月）、予想インフレ率は消費者物価上昇率（除く生鮮食品、前年比）に基づいた筆者推定値（ARモデル、本文参照）。

以上の準備のもと、実質金利が均衡利子率周りを常に変動していると想定すると、最も単純な均衡利子率推定方法として、実質金利を平滑化してトレンド成分を抽出することが考えられる。実質金利を平滑化する方法は、実質金利以外の系列を用いて連立方程式を推定する必要がない点で非常に便利である。

平滑化の方法として、ここではHPフィルターを用いる。HPフィルターでは、次の目的関数を最小化するように選ばれた r_t^T の系列を平滑なトレンド成分の推定値、すなわち均衡利子率 r_t^* の推定値とする。

$$\sum_{t=1}^T (r_t - r_t^T)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(r_{t+1}^T - r_t^T) - (r_t^T - r_{t-1}^T)]^2$$

ただし、 r_t は実質金利である。このような目的関数を最小化する方法自体は、1923年にWhittaker (1923) が提案しているが、ホドリック=プレスコット (Hodrick and Prescott, 1997) による分析が、マクロ経済分析で頻繁に用いられるきっかけとなったため、通常はHPフィルターと呼ばれている。

ここで、最小化の目的関数の第2項目の λ はトレンド成分の平滑度を調整するパラメータであり、大きな値を取るほど平滑性が重視される。 λ が極端に大きな値（例えば 10^9 ）であれば、第2項は0になるように r_t^T を選べばよい。この場合には、線形トレンド $r_t^T = \delta t$ を

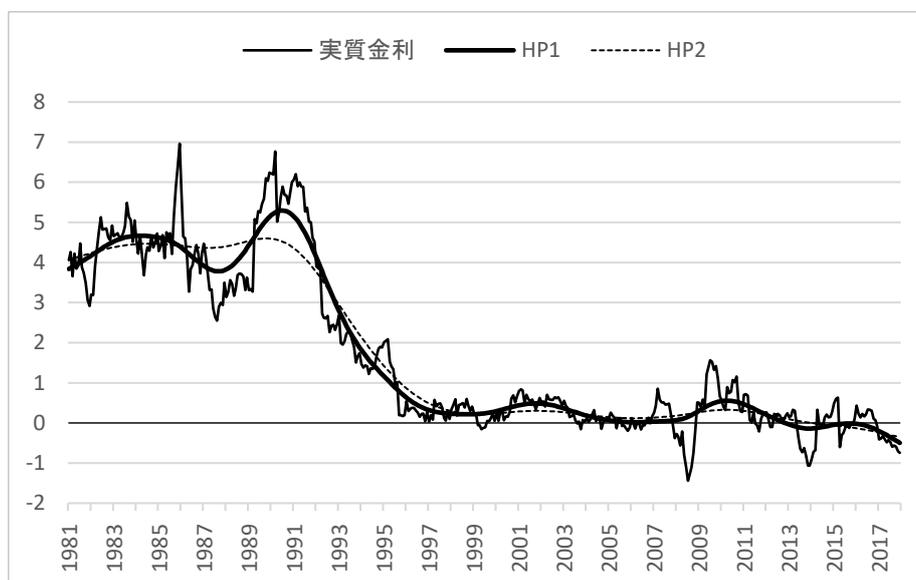
選べば、その階差 $r_t^r - r_{t-1}^r$ は定数 δ であり、階差の階差 $(\delta - \delta)$ は常に0となることから、HP フィルターによるトレンド成分は線形トレンドとなる。逆に、 $\lambda = 0$ の場合は $r_t^r = r_t$ で目的関数が最小となるので、トレンドの平滑性は無視され、循環成分が0となってしまう。実証分析では、 λ は通常その間の値を選ぶ。月次データの場合は、伝統的に $\lambda = 14,400$ という値が用いられていた。最近では、Ravn and Uhlig (2002) が提案した $\lambda = 129,600$ という値が用いられることも多い。

3.2 推定結果

図2では $\lambda = 14,400$ を用いた場合 (HP1) と、 $\lambda = 129,600$ を用いた場合 (HP2) のHP フィルターから算出された均衡利子率が示されている。後者の系列の方が λ は大きいと、平滑化の度合いが大きく部分的に線形トレンドに近い形状となっていることが観察される。オピニオンペーパーで扱ったHP1の系列に基づけば、1990年前後に5%を超えた均衡利子率は1999年までは単調に低下している。その後、2000年代前半と、2010年前後にわずかな上昇が見られるものの、ほぼ横ばいに推移し、足元ではわずかに負の領域に低下していることが観察される。

ただしHP フィルターによる推定結果は、端点 (サンプル終期) において不安定であることが知られており、今後データの追加によって結果が大きく修正される可能性について注意しなければならない。また、HP フィルターは現実の実質金利データのトレンド部分を抽出するという手法であることから、実質金利から持続的に乖離することは定義上容認されない。とりわけ足元の均衡利子率はマイナス領域まで低下しているが、それは観察される実質金利が低下基調にあることの結果である。HP フィルター固有の特徴を反映した結果であることに留意が必要である。

図2 HP フィルターによる均衡利子率



注：月次データ（1981年1月－2017年12月）、HP1、HP2は、それぞれHPフィルター（ $\lambda = 14,400$ 、 $\lambda = 129,600$ ）に基づく均衡利子率推定値。

3.3 先行研究

HP フィルターを用いて日本の均衡利子率を計測した例として、鎌田（2009）、岩崎ほか（2016）があげられる。鎌田（2009）では、HP フィルターによる推定値に加えて、他の低域通過（low-pass）フィルターであるBK（Baxter and King, 1999）フィルターやES（Exponentially Smoothing）フィルターを用いた場合の推計も試みている。ES フィルターを用いた推計値は、他のフィルターを用いた場合の推計値よりも振幅が大きくなる点を指摘している。HP フィルターとBK フィルターを用いた岩崎ほか（2016）の推計では、両者にほとんど違いはない。また本稿の均衡利子率の系列とも非常に近い。

なお鎌田（2009）や岩崎ほか（2016）では、（四半期単位の）実質金利の計算に適応的期待（adaptive expectations）を仮定し、足元のインフレ率（前年同期比）を期待インフレ率の代理変数として用いている点で本稿の計算とは異なっている。

4. Laubach-Williams モデル

4.1 推計手法

すでに何度か触れたように、実質金利が均衡利子率を上回れば、実質GDPは潜在GDPを下回り、インフレ率はその定常値を下回ることが予想される。実質GDPとインフレ率は総需要と総供給が均衡するように決定されるため、金利だけでなく、実質GDPとイン

フレ率のデータを用いて、経済モデルを推定し、均衡利子率を算出することが考えられる。経済モデルを推定して、均衡利子率を算出するアプローチの中で、よく知られているのが Laubach and Williams (2003) による方法である。マクロ経済モデルを推定することから、通常は四半期データが用いられる。

Laubach-Williams では経済システムの総需要に対応して、次の IS 曲線：

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \frac{a_3(r_{t-1} - r_{t-1}^* + r_{t-2} - r_{t-2}^*)}{2} + \epsilon_{\tilde{y}t} \quad (1)$$

および、総供給に対応して、次のフィリップス曲線：

$$\begin{aligned} \pi_t = & b_1 \pi_{t-1} + b_2 \pi_{t-2,4} + (1 - b_1 - b_2) \pi_{t-5,8} + b_3 \tilde{y}_{t-1} \\ & + b_4 (\pi_{t-1}^O - \pi_{t-1}) + b_5 (\pi_t^I - \pi_t) + \epsilon_{\pi t} \end{aligned} \quad (2)$$

が想定される。ただし、 $\tilde{y}_t = y_t - y_t^*$ は GDP ギャップ、 y_t は実質 GDP、 y_t^* は潜在 GDP、 r_t は実質金利、 r_t^* は均衡利子率、 π_t はインフレ率、 $\pi_{t-2,4} = \sum_{i=2}^4 \frac{\pi_{t-i}}{3}$ は 2 期から 4 期ラグまでの平均インフレ率、 $\pi_{t-5,8} = \sum_{i=5}^8 \frac{\pi_{t-i}}{4}$ は 5 期から 8 期ラグまでの平均インフレ率、 π_t^O は原油価格インフレ率、 π_t^I は輸入物価インフレ率、 $\epsilon_{\tilde{y}t}$ 、 $\epsilon_{\pi t}$ は正規分布に従う誤差項であり、分散はそれぞれ $\sigma_{\tilde{y}}^2$ 、 σ_{π}^2 である。

観測できない潜在変数である潜在 GDP と均衡利子率の遷移式は以下のとおりである。まず、潜在 GDP は以下の式に従って成長する。

$$y_t^* = y_{t-1}^* + g_t + \epsilon_{y^*t} \quad (3)$$

$$g_t = g_{t-1} + \epsilon_{gt} \quad (4)$$

ただし、 g_t は潜在成長率であり、ランダムウォークに従う確率トレンドとして定義されている。また ϵ_{y^*t} は潜在 GDP に対する持続性を持たない一時的ショック、 ϵ_{gt} は潜在成長率への恒久的ショックであり、前者は $\sigma_{y^*}^2$ 、後者は σ_g^2 の分散をもつ平均 0 の正規分布に従う。

均衡利子率は潜在成長率 g_t と時間選好率の水準に影響を与える需要ショック成分 z_t の加重平均である。

$$r_t^* = \sigma g_t + z_t \quad (5)$$

$$z_t = z_{t-1} + \epsilon_{zt} \quad (6)$$

ただし、 z_t はランダムウォークに従う確率トレンドであると仮定されている。また ϵ_{zt} は平均が 0、分散が σ_z^2 の正規分布に従うとする。Laubach and Williams (2003) は (6) 式の代わりに、 z_t が定常な AR (2) 過程に従う場合についても併せて検討している。

ここで (5) 式 $r_t^* = \sigma g_t + z_t$ を (1) 式と (2) 式に代入すると

$$\tilde{y}_t = a_1 \tilde{y}_{t-1} + a_2 \tilde{y}_{t-2} + \frac{a_3}{2} \{r_{t-1} + r_{t-2} - \sigma(g_{t-1} + g_{t-2})\} - \frac{a_3}{2} (z_{t-1} - z_{t-2}) + \epsilon_{\tilde{y}t} \quad (7)$$

となる。(7) 式、(2) 式を状態空間表現の観測方程式、(3) 式、(4) 式、(6) 式を状態空間表現の遷移方程式として、カルマンフィルターを用いて尤度を観測される変数

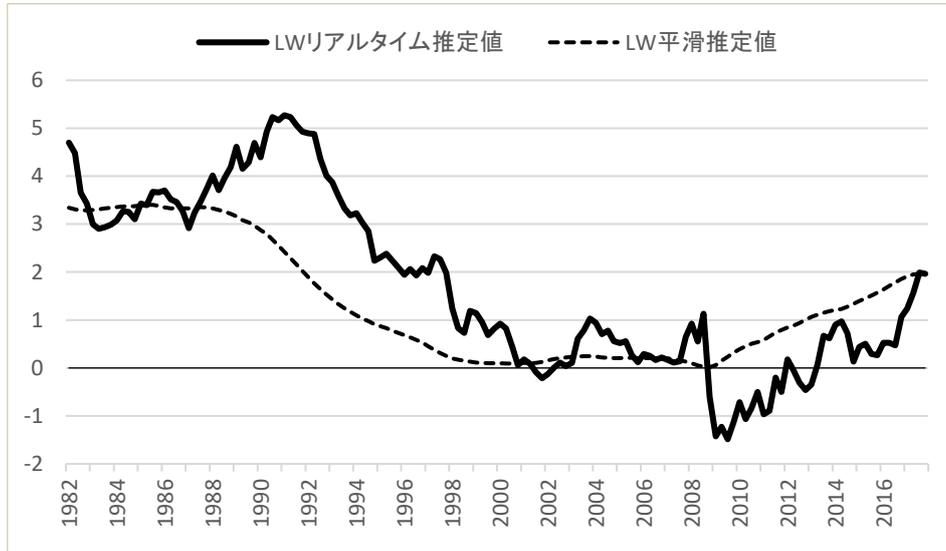
$(\pi_t, y_t, r_t, \pi_t^0, \pi_t^1)$ のデータから評価して、モデルのパラメータを推定することができる。ただし、(4) 式と (6) 式の誤差項の分散 σ_g^2 、 σ_z^2 の最尤推定量は 0 の方向にバイアスが生じることが知られているため、Laubach and Williams (2003) は、Stock and Watson (1998) の中位値不偏推定量を用いて、標準偏差の比率 $\lambda_g = \sigma_g / \sigma_y$ 、 $\lambda_z = a_3 \sigma_z / \sigma_{y^*}$ を推定することを推奨している（この問題は **pile-up** 問題と呼ばれている）。このため、Laubach-Williams のモデル推定では 3 段階の手順を経る必要がある。まず第 1 段階と第 2 段階で推定された λ_g と λ_z を所与として、残りのパラメータを最後の第 3 段階で推定する（詳細については巻末の技術的補論 A を参照）。

カルマンフィルターを用いたパラメータの推定値と同時に潜在変数 (y_t^*, g_t, z_t) も計算できる。潜在変数 g_t と z_t が得られると、均衡利子率 r_t^* は (5) 式 $r_t^* = \sigma g_t + z_t$ を用いて計算すればよい。ここで σ は、消費の異時点間の代替弾力性の逆数であるが、このパラメータは識別が容易でないことから Holston, Laubach and Williams (2017) による国際比較では $\sigma = 1$ が仮定されている。以下では Holston, Laubach and Williams (2017) に従い、 $\sigma = 1$ に固定した場合の、日本の均衡利子率の推定値を示す。また、日本のデータでは消費の利子弾力性パラメータの a_3 の値も安定しないため、 $a_3 = -0.025$ で固定した場合のモデル推定値を中心に議論する。そのうえで、このパラメータの値を変化させた場合の均衡利子率への影響についても検討する。

4.2 推定結果

図 3 では Laubach-Williams による方法を用いて算出された 2 通りの均衡利子率が示されている。これは、カルマンフィルターを用いた潜在変数の計算で、評価する時点で利用可能な情報のみを用いたリアルタイム推定値（片側推定値、**one-sided estimates**）と、将来の情報も含めすべての情報を用いた平滑推定値（両側推定値、**two-sided estimates**）の 2 種類の系列を求めることができることに対応している。Laubach and Williams (2003) の均衡利子率の推計でも、それぞれの推定値に対応した 2 系列が示されている。図 3 で示されているように、平滑推定値はリアルタイム推定値に比べて変動が少ない。一方、Holston, Laubach and Williams (2017) による国際比較ではリアルタイム推定値のみが採用されていることから、以下ではリアルタイム推定値を中心に議論する（なおオピニオンペーパーの議論で用いたのもリアルタイム推定値である）。

図3 Laubach-Williams モデルによる均衡利子率



注：四半期データ（1982年第1四半期－2017年第4四半期）。Laubach-Williams モデルに基づくリアルタイム推定値（片側推定値）と平滑推定値（両側推定値）。

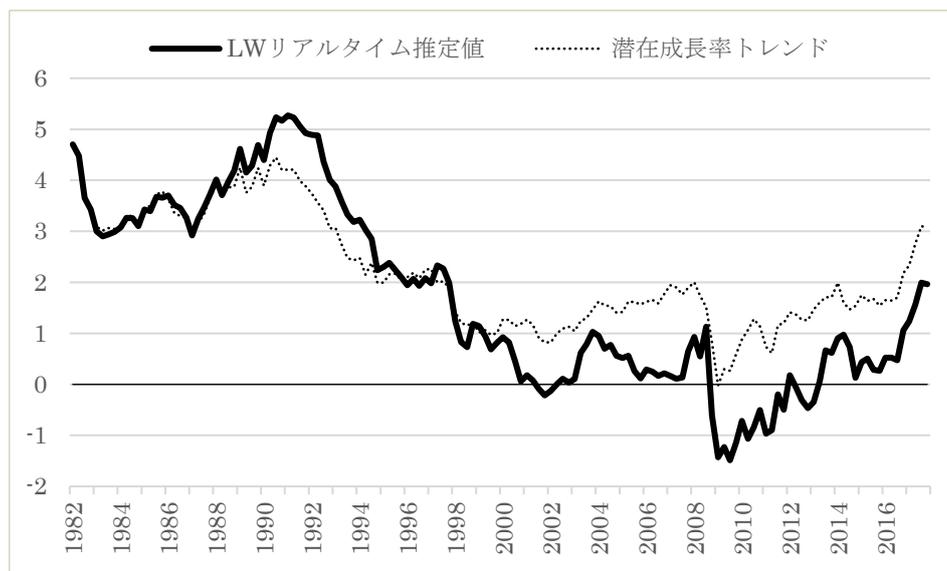
Laubach-Williams モデルに基づく均衡利子率（リアルタイム推定値）は、1990年代前半に5%周辺でピークを迎えた後、2000年代前半にごくわずかに負の値になるまで、ほぼ一貫して低下している。これはHPフィルターによる推定値と整合的である。その後、正の値に戻り、若干の振れを伴うもののほぼ横ばいで推移している。さらに世界金融危機の直後には、-1%を下回る値まで急低下するものの、その後はほぼ単調に増加し直近では2%程度に回復している（後ほど確認するように、この背後では、潜在成長率の推定値が上昇している）。一方、HPフィルターによる推定値では、世界金融危機後の期間、ほぼ横ばいか緩やかな低下で推移しており、この点は対照的である。なおHPフィルターについては、すでに述べたように、推計期間の端点の推定結果は、今後のデータの追加で大きく変化する可能性に留意が必要である。

次に、均衡利子率の変動要因を検討しよう。図4ではLaubach-Williamsモデルにおける均衡利子率 r_t^* と潜在成長率 g_t が示されている。まず、1980年代末から1990年代にかけて潜在成長率が均衡利子率を一貫して下回っている。一方、2000年代以降は潜在成長率が均衡利子率を上回る結果となっている。本稿では両者の差が丁度需要ショック成分 z_t と一致するように設定されているため（ $r_t^* = g_t + z_t$ ）、2000年代以降の均衡利子率の落ち込みは、主に供給要因よりも需要要因で説明されることがわかる。また近年では潜在成長率が上昇基調にあり、それが均衡利子率を押し上げていることも見て取れる。

図5では、異なる消費の利子弾力性のIS曲線を用いたLaubach-Williamsモデルの均衡利子率の比較が示されている。この結果、 $a_3 = -0.05$ や $a_3 = -0.025$ に固定した場合に比

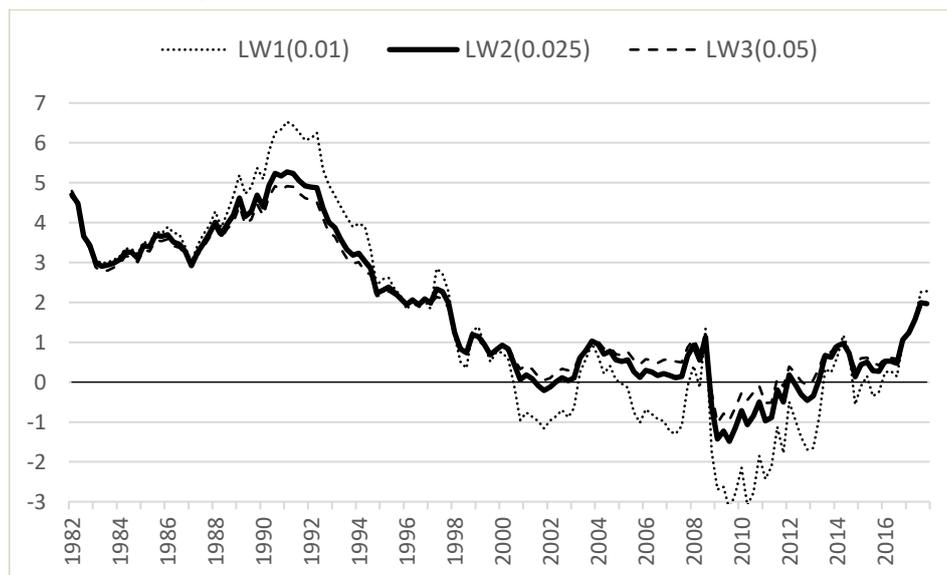
べて、利子弾性値の低い $\alpha_3 = -0.01$ の場合の均衡利子率は振れが大きく、負の領域も増えていることが観察できる。ただし、全体的な動きに関してはほぼ同様の結果が得られており、利子弾性値を固定する分析でも大きな影響がないことが確認できた。

図4 Laubach-Williams モデルによる均衡利子率と潜在成長率トレンド



注：四半期データ（1982年第1四半期-2017年第4四半期）。Laubach-Williams モデルに基づくリアルタイム推定値（片側推定値）と潜在成長率トレンド推定値。

図5 Laubach-Williams モデルによる均衡利子率の比較
——利子弾性=0.01 (LW1)、0.025 (LW2)、0.05 (LW3)——



注：四半期データ（1982年第1四半期-2017年第4四半期）。Laubach-Williams モデルに基づくリアルタイム推定値、利子弾性=0.025 (LW2) は図3で示されたベースケース。

4.3 先行研究

Laubach-Williams モデルを用いて日本の均衡利子率を計測した例としては、小田・村永 (2003)、鎌田 (2009)、岩崎ほか (2016) があげられる。小田・村永 (2003) は、Laubach-Williams モデルを日本経済へ応用した最初の試みであり、1980 年第 1 四半期から 2002 年第 2 四半期までの標本期間で均衡利子率を推計している。ただし、(2) 式の $(\pi_{t-1}^o - \pi_{t-1})$ と $(\pi_t^i - \pi_t)$ が、それぞれ π_{t-1}^i と π_t^i に置き換えられている点と、 z_t に関して (6) 式の代わりに定常な AR (1) 過程を採用している点が、もとのモデルと異なっている。彼らの均衡利子率推定値は 1997 年以降、2002 年第 1 四半期までのほとんどの期間で負の値をとっている。

鎌田 (2009) は Laubach-Williams モデルを 1968 年第 4 四半期から 2007 年第 4 四半期までの標本期間のデータに応用して、日本の均衡利子率を推計した。ただし、モデル内の (2) 式の $(\pi_{t-1}^o - \pi_{t-1})$ は $(\pi_t^o - \pi_t)$ に置き換えられている。鎌田では推計期間を長くとっていることで、Laubach and Williams (2003) や小田・村永 (2003) が直面した λ_g に関する pile-up 問題が生じず、同時推定に成功していることが報告されている（一方、 λ_z に関しては同様の問題が生じたため中位値不偏推定量が採用されている）。推計結果をみると、1960 年代後半から単調に低下した均衡利子率は 1970 年代中盤に -4% 前後で底を打っているように見える。その後、上昇に転じた均衡利子率は 1980 年代後半まで増加傾向が続く。4% を超えた 1990 年代に入ると減少に転じ 1990 年代前半と 2000 年代初頭にわずかに負の値をとっている。ただし、鎌田はモデルの推計結果が、パラメータの初期値、状態変数の初期値、分散共分散行列の初期値などの設定に敏感に反応するため、必ずしも頑健とは言えず、日本への Laubach-Williams モデルを用いた均衡利子率推定値は、不確実性が大きく実践には向かないと議論している。特に消費の金利弾力性の推定値は、標本期間を少し変更しただけで、極端に小さくなり、均衡利子率の変動が異常に高まることを指摘している。

岩崎ほか (2016) では、鎌田 (2009) の設定を踏襲し、標本期間を 2016 年第 1 四半期まで延長した。両者の均衡利子率の推定値は世界金融危機前後を除き、概ね整合的である。両者の違いは、鎌田 (2009) が標本期間に入らない世界金融危機の影響を捉えることができていない点に起因している。

5. DSGE モデル

5.1 推計手法

Laubach-Williams による方法では、家計や企業の動学的な最適化が考慮されていない。また中央銀行のゼロ金利制約が明示的に取り扱われていないという問題点もある。ここで

は、これらの問題を考慮した Liboshi, Shintani and Ueda (2018) の非線形 DSGE モデルを用いた均衡利子率の推計方法を紹介する。モデルは代表的家計、企業、中央銀行から構成されている。企業は独占的競争の中間財生産者と完全競争の最終財生産者の2種類が存在する。モデル内での経済変動は割引率（選好）ショック、技術ショック、金融政策ショックの3つの要因から引き起こされる。

5.1.1 家計

代表的家計は

$$E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j Z_{t+j}^b \left\{ \frac{C_{t+j}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{(A_{t+j})^{1-\sigma} \chi l_{t+j}^{1+\omega}}{1+\omega} \right\} \right] \quad (8)$$

で表現される効用を予算制約 $C_t + B_t/P_t \leq W_t l_t + R_{t-1} B_{t-1}/P_t + T_t$ の下で最大化しているとする。ただし、 C_t は消費、 l_t は労働サービス、 P_t は一般物価水準、 W_t は実質賃金、 R_t は名目利子率、 T_t は政府からの所得移転である。また B_t は t 期末の債券保有量である。パラメータは $\beta \in (0,1)$ が主観的割引率、 $\sigma > 0$ は消費の異時点間の代替弾力性の逆数、 $\omega > 0$ は労働供給の賃金弾力性の逆数、 $\chi > 0$ は単位を調整するための定数である。最後に、 Z_t^b は割引率（選好）の変動要因であり、

$$\log(Z_t^b) = \rho^b \log(Z_{t-1}^b) + \epsilon_t^b$$

の AR (1) 過程に従っていると仮定する。

5.1.2 企業

最終財企業は異なる中間財 $Y_{f,t}$ ($f \in [0,1]$) を組み合わせて利潤を最大化するように最終財 $Y_t = \left\{ \int_0^1 Y_{f,t}^{\frac{\eta-1}{\eta}} df \right\}^{\frac{\eta}{\eta-1}}$ の生産量を決定する。ただし、 $\eta > 0$ は異なる中間財間の代替の弾力性である。一方、 f 番目の中間財企業の生産量は生産関数 $Y_{f,t} = A_t l_{f,t}$ で記述される。生産性 A_t は I (1) 過程に従っており、その平均成長率は γ^a で、平均成長率からの乖離 $\mu_t^a \equiv \log(A_t/A_{t-1}) - \gamma^a$ は

$$\mu_t^a = \rho^a \mu_{t-1}^a + \epsilon_t^a \quad (9)$$

の AR (1) 過程に従う。 f 番目の中間財企業は価格の改定にローテンバーグ (Rotemberg) 型の調整費用が発生するとして、労働者への賃金支払いと価格の調整費用を売り上げから差し引いた

$$E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \frac{\Lambda_{t+j} Z_{t+j}^b}{\Lambda_t Z_t^b} \left(\frac{P_{f,t+j}}{P_{t+j}} - \frac{W_{t+j}}{A_{t+j}} - \frac{\phi}{2} \left(\frac{P_{f,t+j}}{P_{f,t+j-1}} - \pi^* \right)^2 \right) Y_{f,t+j} \right] \quad (10)$$

の利潤を最大化するように中間財価格 $P_{f,t}$ を設定する。ただし、 Λ_t は確率的割引因子 (stochastic discount factor) であり、 π^* は目標インフレ率、 ϕ はローテンバーグ型調整費用の係数である。

5.1.3 中央銀行

ゼロ金利制約 (Zero Lower Bound, ZLB) は次式で表現される。

$$R_t = \max(1, R_t^*) \quad (11)$$

ただし、ここで金利変数は粗収益率で表され、 R_t^* は 1 より小さくなること (マイナス金利) も許容する概念的金利 (notional interest rate) である。一方、現実の金利 R_t の下限は 1 (ゼロ金利) であるとする。金融政策ルールは

$$R_t^* = (R_{t-1}^*)^{\rho^r} \left(r^* \pi^* \left(\frac{\pi_t}{\pi^*} \right)^{\psi_\pi} \left(\frac{Y_t/A_t}{Y_t^*/A_t} \right)^{\psi_y} \right)^{1-\rho^r} e^{\epsilon_t^r} \quad (12)$$

を考える。ただし ρ^r , ψ_π , ψ_y はそれぞれ金融政策ルールのパラメータであり、均衡利子率の定常値は r^* 、潜在 GDP は Y_t^* 、インフレ率は π_t であり、 ϵ_t^r は *i.i.d.* で平均ゼロの金融政策ショックである。

5.1.4 動学式

財市場が均衡するためには、

$$Y_t = C_t + \phi(\pi_t - \pi^*)^2 Y_t / 2 \quad (13)$$

が成立している。伸縮的価格の場合の均衡はローテンバーグ型調整費用のない $Y_t = C_t$ となる。均衡利子率 r_t^* は伸縮的価格の下での実質利子率に一致する。同様に潜在 GDP Y_t^* は伸縮的価格の下での実質 GDP と一致する。以上の連立方程式体系で記述されたモデルを解き、データから推定することで均衡利子率が産出される。

モデルの構造を俯瞰するために、線形近似した場合のモデルを用いて、均衡利子率の役割を検討しよう。動学式を定常均衡値の周りで対数線形近似すると、以下の 3 式が導出される。まず、フィリップス曲線に相当する式が

$$\pi_t - \pi^* = \beta e^{(1-\sigma)\gamma^a} E_t[\pi_{t+1} - \pi^*] + \frac{(\eta - 1)(\omega + \sigma)}{\phi \pi^*} (y_t - y_t^*)$$

で与えられる。次に IS 曲線に相当する式が

$$y_t - y_t^* = E_t \left[y_{t+1} - y_{t+1}^* - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_t - r^* \pi^*}{r^* \pi^*} - \frac{\pi_{t+1} - \pi^*}{\pi^*} - \frac{r_{t+1} - r^*}{r^*} \right) \right]$$

と導出される。最後に、均衡利子率の決定式は

$$r_t^* = r^* [1 + \sigma \rho^a \mu_t^a + (1 - \rho^b) \log Z_t^b]$$

で与えられる。均衡利子率の定常均衡値 r^* は $e^{\sigma \gamma^a} / \beta$ と一致する。仮に均衡利子率 r_t^* が減少した場合、GDP ギャップ ($y_t - y_t^*$) とインフレ率 (π_t) は、均衡利子率の減少を十分に相殺するように名目金利を引き下げる金融緩和策を講じない限り、減少する。これは金融政策ルールの方程式にある金融政策ショック ϵ_t^r が負であり、絶対値で大きい時に相当する。

もし、そのような金融政策ショックがない場合、均衡利子率 r_t^* の減少は GDP ギャップ ($y_t - y_t^*$) とインフレ率 (π_t) の減少を意味することから、金融政策ルールを通じて名目利子率は減少する。このことからゼロ金利の下限に到達する可能性が上昇する。

5.2 推定結果

図 6 では Liboshi, Shintani and Ueda (2018) の非線形 DSGE モデルによる方法を用いて算出された均衡利子率が示されている。Liboshi, Shintani and Ueda (2018) では、1983 年第 2 四半期から 2016 年第 2 四半期までのデータを用いて DSGE モデルが推計されているが、本稿ではその構造パラメータ推定値を用いて、2017 年第 4 四半期まで標本期間を延長した場合の均衡利子率を計算している (ゼロ金利制約がある非線形 DSGE モデルの解法と推計方法については、巻末の技術的補論 B を参照)。

まず、均衡利子率の全期間の定常値は 0.46% と推定された。1980 年代中盤に 1% をやや下回るものの、その後は増加する傾向を見せ、1990 年代初めには 3% を超える。その後、1990 年代後半まで次第に低下していき、1990 年代後半と 2000 年代前半には負の値をとるが -1% を下回ることはなかった。世界金融危機直後には -2% に近づくほどの急激な低下が観測される。その後上向き基調に転じ、直近では 0% と 1% の間を推移している。

図 7 では複数の DSGE モデルによる方法を用いて算出された均衡利子率の比較が示されている。線形化されたモデルの場合 (DSGE1)、線形化されたモデルにゼロ金利制約を課した場合 (DSGE2)、ゼロ金利制約のある非線形モデルの場合 (DSGE3、ベースケース)、ゼロ金利制約のない非線形モデル (DSGE4) の 4 通りの推定値が示されている。この比較から線形 DSGE モデルを用いた場合 (DSGE1 と DSGE2) には、非線形 DSGE モデルを用いた場合 (DSGE3 と DSGE4) に比べて、均衡利子率の推定値が過大になる傾向が観察される。ゼロ金利制約の有無は、定性的な結果には影響を及ぼさなかった。

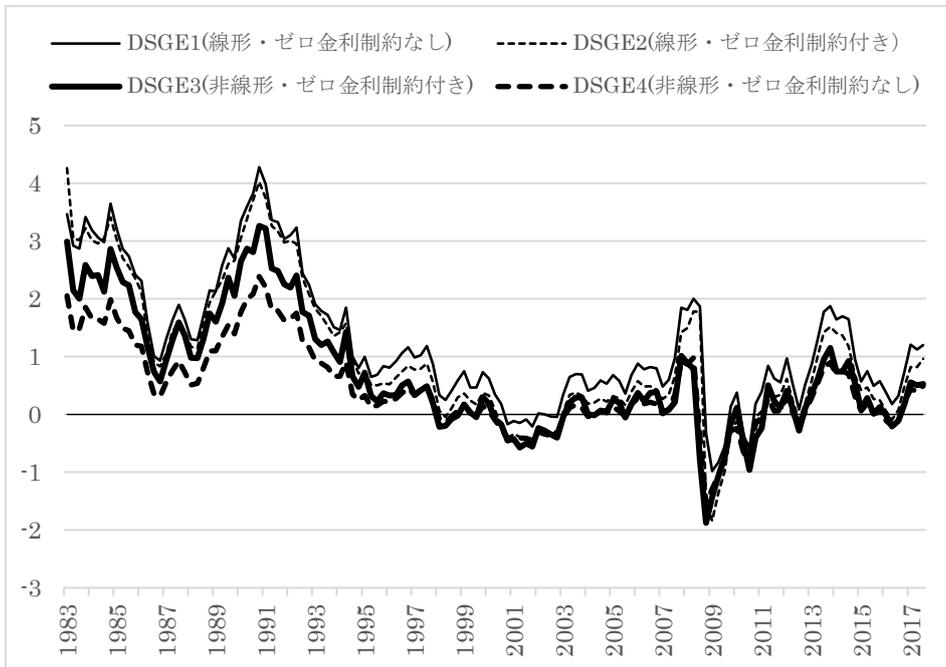
図6 DSGEモデルによる均衡利子率



注：四半期データ（1983年第2四半期－2017年第4四半期）。DSGEモデル（非線形・ゼロ金利制約付き）に基づく推定値。

図7 DSGEモデルによる均衡利子率の比較

——線形／非線形モデル、ゼロ金利制約の有無による違い——



注：四半期データ（1983年第2四半期－2017年第4四半期）。DSGEモデルに基づく推定値。DSGE1（線形・ゼロ金利制約なし）、DSGE2（線形・ゼロ金利制約付き）、DSGE3（非線形・ゼロ金利制約付き：ベースケース）、DSGE4（非線形・ゼロ金利制約なし）。

5.3 先行研究

DSGE モデルを用いて日本の均衡利子率を計測した例としては、Iiboshi, Shintani and Ueda (2018) 以外でも鎌田 (2009) や Okazaki and Sudo (2018) があげられる。

鎌田 (2009) は、1970 年第 2 四半期から 1987 年第 4 四半期までの標本期間で DSGE モデルを推計し、その構造パラメータ推定値から 1970 年第 2 四半期から 2008 年第 1 四半期の均衡利子率を計算している。鎌田 (2009) の DSGE モデルでは金融政策ルールとして、(13) 式のように金利が実質 GDP ギャップに反応するのではなく、実質 GDP 成長率に反応するように定式化されている。また、非自発的失業を含むような拡張も考慮されている点に特徴がある。また、モデルの構造パラメータ推計のための標本期間が 1987 年までであることから、Iiboshi, Shintani and Ueda (2018) のようなゼロ金利制約を考慮する必要がない。均衡利子率は標本期間の初期には負の値をとっているが、1970 年代には大きく変動しながらも徐々に増加して、1980 年代後半に 6%を超えている。その後 1990 年代には急速に低下し、1990 年代後半から 2000 年代にかけては概ね 0%を中心に小刻みに変動しながら推移している（ただし鎌田の図表 12-12 はもとの推定値の中心 3 期移動平均が図示されていることに注意が必要である）。

Okazaki and Sudo (2018) は、1980 年第 2 四半期から 2017 年第 2 四半期までの標本期間で DSGE モデルを推定し、均衡利子率を計算している。彼らの DSGE モデルでは金融仲介機関の役割が明示的に導入されている点と金融政策ルールとして、実質 GDP が除かれている代わりに金利変化のニュースショックが考慮されている点が特徴である。ただし、Iiboshi, Shintani and Ueda (2018) のようなゼロ金利制約に起因する非線形性は捨象されている。Okazaki and Sudo (2018) の均衡利子率は、1980 年代は平均 4%で推移していたものが、1990 年代前半から中盤にかけて急速に低下し、2000 年代前半と 2010 年代前半で 2 度負の値をとっている結果になっている。

6. 結果の要約

本稿は、わが国の均衡利子率について、主要な推計アプローチ——1 変数の時系列アプローチ（HP フィルター）、Laubach-Williams モデル、DSGE モデル——に基づき推定を行った。それぞれの手法の特徴を踏まえ、またモデルの構造や想定されるパラメータに関する頑健性にも注意を払って分析を行った。

全体的な検証結果を要約すると、まず各手法に共通した結果として、1980 年代から 1990 年代初めにかけて均衡利子率は比較的高い水準にあり、それが 1990 年代を通じて 0%近くまで大きく低下し、世界金融危機時にさらに落ち込んだという結果が示された。世界金融危機以降の期間については、手法によって異なる推定結果が得られた。HP フィルターに基づく推定値からは、危機後もほぼ横ばいで推移し、足元ではわずかにマイナ

ス領域に低下した。HP フィルターは現実の実質金利データのトレンド部分を統計的に抽出するという手法であり、実質金利自体が近年低下基調にあることから、同手法に固有の特徴を反映した結果と考えられる。一方、Laubach-Williams モデルと DSGE モデルからは、世界金融危機後に持ち直しに転じ、近年の均衡利子率は総じて上向きつつあるという結果が示された。Laubach-Williams モデルでは、潜在成長率の改善が均衡利子率の上昇に寄与していた。両モデルはともに経済構造を明示した分析であり、それぞれ異なるモデル設定やパラメータを用いた場合にも結果は頑健であった。

以上まとめれば、わが国の均衡利子率は、1990 年代の低下と世界金融危機後の落ち込みを経て立ち直りに転じ、潜在成長率の上昇を伴いながら、近年上昇傾向にあるという結果が示唆された。

技術的補論

A. Laubach-Williams モデルによる均衡利子率の計算方法

Laubach-Williams モデルは 3 段階の推定方法が用いられる。それぞれの段階の状態空間表現は以下に示されている。

A.1 第 1 段階

観測方程式：

$$\begin{bmatrix} y_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & b_1 & b_2 & 1 - b_1 - b_2 & b_4 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2,4} \\ \pi_{t-5,8} \\ \pi_{t-1}^o - \pi_{t-1} \\ \pi_t^m - \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & -b_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^* \\ y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \end{bmatrix} + v_t$$

遷移方程式：

$$\begin{bmatrix} y_t^* \\ y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ y_{t-3}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

ただし

$$v_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{\tilde{y}t} \\ \epsilon_{\pi t} \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\pi^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{y^*t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_{y^*}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

である。第1段階において最尤法で推定するパラメータは

$$\theta = (a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, g, \sigma_{\bar{y}}, \sigma_{\pi}, \sigma_{y^*})'$$

である。

A.2 第2段階

観測方程式：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} y_t \\ \pi_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \frac{a_3}{2} & \frac{a_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & 1 - b_1 - b_2 & b_4 & b_5 & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ r_{t-1} \\ r_{t-2} \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2,4} \\ \pi_{t-5,8} \\ \pi_{t-1}^o - \pi_{t-1} \\ \pi_t^m - \pi_t \\ 1 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & a_5 \\ 0 & -b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^* \\ y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ g_{t-1} \end{bmatrix} + v_t \end{aligned}$$

遷移方程式：

$$\begin{bmatrix} y_t^* \\ y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ g_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ y_{t-3}^* \\ g_{t-2} \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

ただし

$$v_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{\tilde{y}t} \\ \epsilon_{\pi t} \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{y}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\pi}^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{y^*t} \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_{gt-1} \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_{y^*}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_g \sigma_{y^*})^2 \end{bmatrix} \right)$$

である。第2段階において最尤法で推定するパラメータは

$$\theta = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, g, \sigma_{\tilde{y}}, \sigma_{\pi}, \sigma_{y^*})'$$

である。

A.3 第3段階

観測方程式：

$$\begin{bmatrix} y_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \frac{a_3}{2} & \frac{a_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & 1 - b_1 - b_2 & b_4 & b_5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ r_{t-1} \\ r_{t-2} \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2,4} \\ \pi_{t-5,8} \\ \pi_{t-1}^o - \pi_{t-1} \\ \pi_t^m - \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -\sigma \frac{a_3}{2} & -\sigma \frac{a_3}{2} & -\frac{a_3}{2} & -\frac{a_3}{2} \\ 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t^* \\ y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ g_{t-1} \\ g_{t-2} \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} + v_t$$

遷移方程式：

$$\begin{bmatrix} y_t^* \\ y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ g_{t-1} \\ g_{t-2} \\ z_{t-1} \\ z_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1}^* \\ y_{t-2}^* \\ y_{t-3}^* \\ g_{t-2} \\ g_{t-3} \\ z_{t-2} \\ z_{t-3} \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

ただし

$$v_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{\tilde{y}t} \\ \epsilon_{\pi t} \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{y}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\pi}^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{y^*t} + \epsilon_{gt-1} \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_{gt-1} \\ 0 \\ \epsilon_{zt-1} \\ 0 \end{bmatrix} \sim N \left(0, \begin{bmatrix} (1 + \lambda_g^2)\sigma_{y^*}^2 & 0 & 0 & (\lambda_g\sigma_{y^*})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_g\sigma_{y^*})^2 & 0 & 0 & (\lambda_g\sigma_{y^*})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\lambda_z\sigma_{\tilde{y}}}{a_3}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

である。第3段階において最尤法で推定するパラメータは

$$\theta = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \sigma, g, \sigma_{\tilde{y}}, \sigma_{\pi}, \sigma_{y^*})'$$

である。

Holston, Laubach and Williams (2017) では3段階計算のプログラムのRコードを公開しており、本稿の均衡利子率も、そのプログラムを用いて計算した。

B. DSGE モデルによる均衡利子率の計算方法

B.1 非線形 DSGE モデルの解法

ここでは一般的な非線形モデルの合理的期待均衡を解く方法として線形補完と時間反復法 (Time iteration with Linear interpolation, TL 法) を説明する。TL 法は政策関数反復法の一つであり、Richter, Throckmorton and Walker (2014) は計算速度と精度の 2 つの観点から有利な計算方法であることを示している。構造パラメータ θ が与えられた場合のモデルの解法は次のように考えることができる。Iiboshi, Shintani and Ueda (2018) の定式化では 3 つの誤差項と 1 個の状態変数 R_{t-1}^* が存在しているため、モデル内の変数 x_t の政策関数は $z_t = (\mu_t^a, Z_t^a, \epsilon_t^r, R_{t-1}^*)'$ の関数となる。方程式には、時間反復法では、すべてのノード (z_t のグリッド点) で異時点間の変数動学を記述する x_t と $E_t(x_{t+1})$ が含まれている方程式が成立するように、政策関数が探索される。固定点反復法 (fixed-point iteration) と比べて、すべてのノードで非線形最小問題の解を求める必要があるため、計算に手間がかかる一方、より安定的な解が得られることが知られている。またノードごとに計算された政策関数は、線形補完によって全体の形状を評価する。チェビシエフ多項式の基底を用いた射影法などの大域的な方法に比べて、ZLB に起因する屈折点を考えるような非線形モデルの解法としてはより望ましいと考えられる。

TL 法を Iiboshi, Shintani and Ueda (2018) の非線形 DSGE モデルに用いた場合の手続きについて、より詳しく説明する。引数が最小状態ベクトル (ϵ_t, s_t) であるベクトル表現の関数を $f(\cdot)$ として、最適化条件が

$$E[f(\epsilon_{t+1}, s_{t+1}, \epsilon_t, s_t) | \Omega_t] = 0$$

と表現されるとしよう。ただし ϵ_t は外生変数のベクトル、 s_t は内生変数のベクトル、 Ω_t は情報集合である。ここでのモデルでは $\epsilon_t = (\epsilon_t^a, \epsilon_t^b, \epsilon_t^r)'$ 、 $s_t = (y_t, c_t, \pi_t, y_t^*, R_t, R_t^*, r_t^* \mu_t^a, Z_t^b)'$ 、 $z_t = (R_{t-1}^*, \mu_t^a, Z_t^b, \epsilon_t^r)'$ ただし $y_t \equiv Y_t/A_t$ 、 $c_t \equiv Y_t/A_t$ 、 $y_t^* \equiv Y_t^*/A_t$ である。

関数 $f(\cdot)$ を所与として、モデル上の政策関数 $\Phi(\cdot)$ は状態ベクトルの関数である。TL 法では局所的に時間に不変な政策関数を z_t のノードで局所近似する。つまり、 $\Phi(z_t)$ を近似する。合理的期待均衡は $(y_t, y_t^*, \pi_t)' = \Phi(z_t)$ を $f(\cdot)$ に含まれる将来の変数に代入することで、計算される。ここでは連続な変数 $(R_{t-1}^*, \mu_t^a, Z_t^b)'$ を離散化して 9 個のグリッド点で評価し、外生ショック ϵ_t^r を 5 個のグリッド点で評価するため、全体でのノードの数は $3,645 = (9 \times 9 \times 9 \times 5)$ 個となっている。

政策関数反復法のアルゴリズムは複数の段階に分けられる。アルゴリズムの反復回数 of 添え字を $i \in \{0, \dots, I\}$ 、政策関数 $\Phi(z_t)$ を評価するノードの添え字を $n \in \{0, \dots, N\}$ とする。

1. まず $i = 0$ について、政策関数 $\Phi^0(z_t)$ を ZLB のない対数線形近似モデルから類推する。線形モデルの解には Sims (2002) による **gensys** アルゴリズムを用いる。

2. 反復 $i \in \{0, \dots, I\}$ とノード $n \in \{0, \dots, N\}$ については次のような計算手続きに従う。
 - (a) ZLB のもとで政策関数を $(y_{t-1}, y_{t-1}^*, \pi_{t-1})' = \Phi(z_{t-1})$ として、内生変数 $(c_t, R_t, R_t^*, r_t^*, \mu_t^a, Z_t^b)'$ の値を計算する。
 - (b) 将来変数の期待値 $\{E_t(y_{t+1}), E_t(y_{t+1}^*), E_t(\pi_{t+1})\}$ を近似するため、区分線形補完を用いて政策関数 $\Phi^{i-1}(z_t)$ を評価する。将来変数を $E[f(\cdot)|\Omega_t] = 0$ に代入し、 ε_{t+1} を発生させて（あるいは 0 と固定して）評価する
 - (c) Sims による `csolve` の非線形解コードを用いて異時点間方程式 $E[f(\cdot)|\Omega_t] = 0$ の誤差を最小化するように政策関数 $\Phi^i(z_t)$ を計算する。
3. 反復回数による政策関数の変化の大きさの尺度を $\text{maxdist} = \max(|y_n^i - y_n^{i-1}|, |y_n^{*i} - y_n^{*(i-1)}|, |\pi_n^i - \pi_n^{i-1}|)$ で定義する。政策関数の収束条件を $\text{maxdist} < 10^{-4}$ のように設定し、すべてのノード n について政策関数が収束するまで第 2 段階を繰り返す。

B.2 非線形 DSGE モデルの推定法

均衡利子率は ZLB のある DSGE モデルの構造パラメータをベイズ推定することで計算される。具体的には Chopin, Jacob and Papaspiliopoulos (2013) や Herbst and Schorfheide (2015) によって開発された SMC²法を採用している。SMC²法は次の 4 段階から構成されている。第 1 段階の「初期化 (initialization)」では、パラメータ θ について、 N_θ 個の粒子 (particles) を無作為抽出する。以下の第 2 段階から第 4 段階までの手続きを N_ϕ 回のステージ分繰り返す。第 2 段階の「修正 (correction)」では、与えられた θ のもとで、尤度関数 $\hat{p}(\mathbf{Y}_t|\theta)$ と重み \tilde{W} を計算する。第 3 段階の「選択 (selection)」では、以前のステージの θ と以前の段階の重み \tilde{W} から、 θ と w を抽出する。最後の第 4 段階の「変異 (mutation)」ではメトロポリス・ヘイスティングス法により、 θ と \tilde{W} を増加させる。

第 2 段階では、与えられた θ のもとで、TL 法でモデルを解く。ショック $(\mu_t^a, Z_t^b, \varepsilon_t^r)'$ について N_S 個の粒子を発生させてから、 $\hat{\mathbf{Y}}_t$ の経路を生成して、観測された変数 \mathbf{Y}_t に測定誤差を仮定することで、尤度関数 $\hat{p}(\mathbf{Y}_t|\theta)$ を評価する。モデルが線形ではないため、カルマンフィルターを用いて尤度関数を評価することが不可能である。このため粒子フィルターを用いて $\hat{p}(\mathbf{Y}_t|\theta)$ を計算し、ショックに関して粒子の数 N_S が十分に大きいとき、真の尤度関数 $p(\mathbf{Y}_t|\theta)$ を近似することができる。

実際の推定では粒子の数を $N_S = 40,000$ 、 $N_\theta = 1,200$ に設定し、ステージの数を $N_\phi = 10$ に設定した。これらの数値は Richter and Throckmorton (2016) の研究を参考にしている。

参考文献

- 岩崎雄斗・須藤直・西崎健司・藤原茂章・武藤一郎 (2016)「わが国における均衡利子率の動向」 「総括的検証」補足ペーパーシリーズ②、日銀レビュー、2016-J-18.
- 小田信行・村永淳 (2003)「自然利子率について：理論整理と計測」、日本銀行ワーキングペーパー・シリーズ、No.03-J-5.
- 鎌田康一郎 (2009)「わが国の均衡実質金利」、深尾京司編『マクロ経済と産業構造』12章、慶應義塾大学出版会.
- Baxter, Marianne and Robert G. King (1999) “Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series,” *Review of Economics and Statistics*, 81(4), 575-593.
- Chopin, Nicolas, Pierre E. Jacob and Omiros Papaspiliopoulos, (2013) “SMC2: An Efficient Algorithm for Sequential Analysis of State Space Models,” *Journal of the Royal Statistical Society*, B,75(3), 397-426.
- Herbst, Edward and Frank Schorfheide (2015) *Bayesian Estimation of DSGE Models*, Princeton University Press, Princeton.
- Hodrick, Robert. J. and Edward. C. Prescott (1997) “Post-War U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 29(1), 1-16.
- Holston, Kathryn, Thomas Laubach and John C. Williams (2017) “Measuring the Natural Rate of Interest: International Trends and Determinants,” *Journal of International Economics*, 108, S59-S75.
- Iiboshi, Hirokuni and Mototsugu Shintani, and Kozo Ueda (2018) “Estimating the Nonlinear New Keynesian Model with the Zero Lower Bound for Japan, TCER Working Paper Series E-120.
- Laubach, Thomas and John C. Williams (2003) “Measuring the Natural Rate of Interest,” *Review of Economics and Statistics*, 85(4), 1063-1070.
- Okazaki, Yosuke and Nao Sudo (2018) “Natural Rate of Interest in Japan: Measuring its size and identifying drivers based on a DSGE model,” Bank of Japan Working Paper Series 18-E-6.
- Ravn, Morten O. and Harald Uhlig (2002). “On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations,” *Review of Economics and Statistics*,84, 371-376.
- Richter, Alexander W., Nathaniel A. Throckmorton, and Todd B. Walker (2014), “Accuracy, Speed and Robustness of Policy Function Iteration,” *Computational Economics*, 44, 445-476.
- Richter, Alexander W. and Nathaniel A. Throckmorton (2016) “Are Nonlinear Methods Necessary at the Zero Lower Bound?” Federal Reserve Bank of Dallas Research Department Working Paper 1606.
- Stock, James H. and Mark W. Watson (1998) “Median Unbiased Estimation of Coefficient Variance in a Time-Varying Parameter Model,” *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 349-358.

Whittaker, E.T (1923) "On a New Method of Graduations," *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 41 63-75.